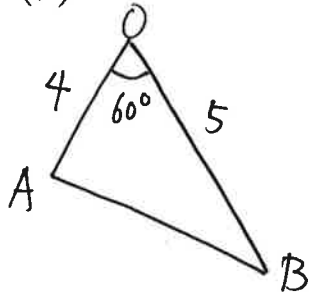


II (1)



余弦定理より.

$$\begin{aligned} AB^2 &= OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos \angle AOB \\ &= 16 + 25 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} \\ &= 21 \end{aligned}$$

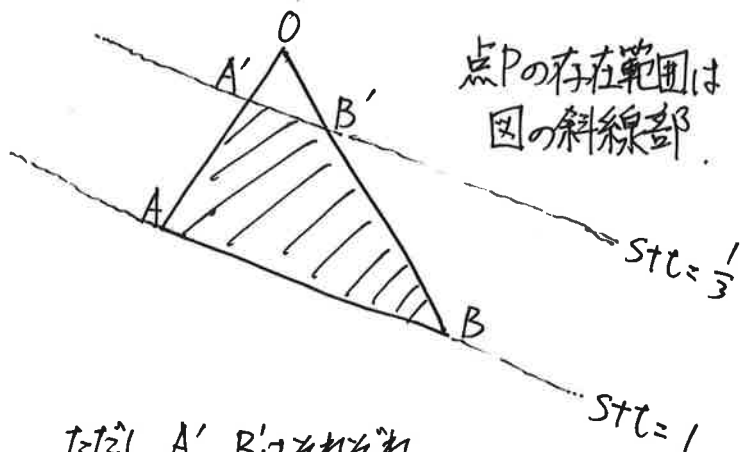
$$AB > 0 \text{ より } \underline{AB = \sqrt{21}}$$

$$\cos \angle AOB = \frac{1}{2} \text{ より } \angle AOB = 60^\circ$$

$$\text{よって } \sin \angle AOB = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ なので.}$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot \sin \angle AOB \text{ より.} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \underline{5\sqrt{3}} \end{aligned}$$

(2) $\frac{1}{3} \leq s+t \leq 1, s \geq 0, t \geq 0$
このときの点Pの存在範囲を
図示すると次のようになる.



ただし、A', B'はそれぞれ

$\vec{OA'} = \frac{1}{3}\vec{OA}, \vec{OB'} = \frac{1}{3}\vec{OB}$ とみたす
点とする.

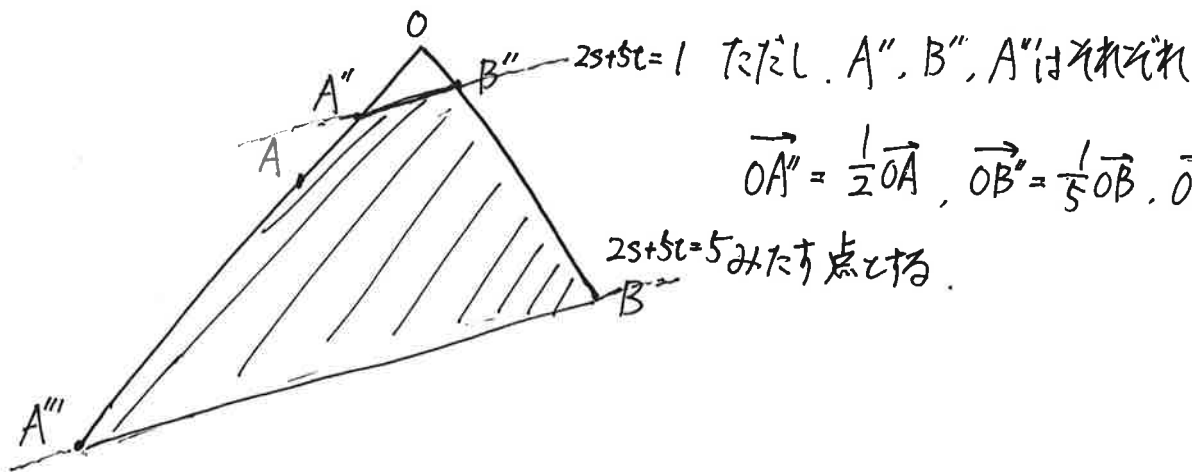
よって、求める面積は.

$$\begin{aligned} S - \frac{1}{9}S &= \frac{8}{9}S \\ &= \frac{8}{9} \times 5\sqrt{3} \\ &= \underline{\frac{40\sqrt{3}}{9}} \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{l} \triangle OAB \text{ と } \triangle OA'B' \text{ は} \\ \text{相似であり、相似比は } 3:1 \\ \text{であることから.} \\ \triangle OAB \text{ と } \triangle OA'B' \text{ の面積比は} \\ 9:1 \text{ になることを利用した} \end{array} \right)$$

$$\text{II (3)} \quad 1 \leq 2s + 5t \leq 5, \quad s \geq 0, t \geq 0$$

このときの点Pの存在範囲を図示すると.

次の斜線部のようになる.



$$\vec{OA''} = \frac{1}{2}\vec{OA}, \quad \vec{OB''} = \frac{1}{5}\vec{OB}, \quad \vec{OA'''} = 5\vec{OA''} \text{ 等}$$

$2s+5t=5$ みたす点とする.

よて、求める面積は $\triangle OA'''B$ の面積を S' とし.

$$S' - \frac{1}{25}S' = \frac{24}{25}S'$$

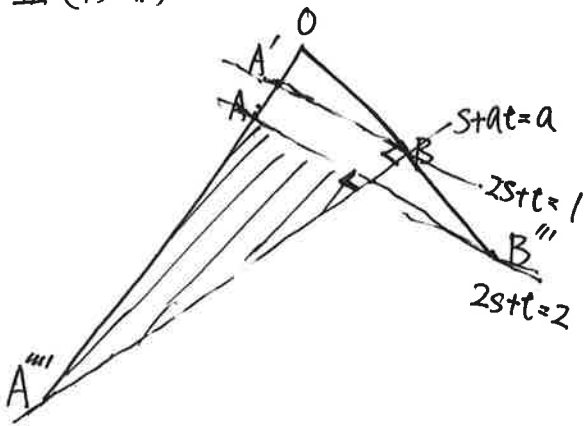
また $S' = \frac{1}{2} \cdot OA''' \cdot OB \cdot \sin \angle A'''OB$ なので.

$$\begin{aligned} S' &= \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{25\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{よて. } \frac{24}{25}S' = \frac{24}{25} \times \frac{25\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3} //$$

($\triangle OA'''B$ と $\triangle OA''B''$ は相似であり!
相似比は 5:1 であることから.
 $\triangle OA'''B$ と $\triangle OA''B''$ の面積比は
25:1 になることを利用して)

II (4) (i)



$$s+at \leq a, 2 \leq 2s+t, s \geq 0, t \geq 0$$

このときの点Pの存在範囲を図示する。

左のようになる。(斜線部)

ただし、 A''' と B'' は $\vec{OA'''} = a\vec{OA}$, $\vec{OB''} = 2\vec{OB}$ をみたす点とる。

斜線部が図のような直角三角形になるとき。

$\triangle A'A'''B$ も $\angle A'BA''' = 90^\circ$ をみたす

直角三角形となるので、($\because AB'' \parallel A'B$)

$\vec{BA'''} \cdot \vec{BA'} = 0$ をみたす。

$$(a\vec{OA} - \vec{OB}) \cdot (\frac{1}{2}\vec{OA} - \vec{OB}) = 0$$

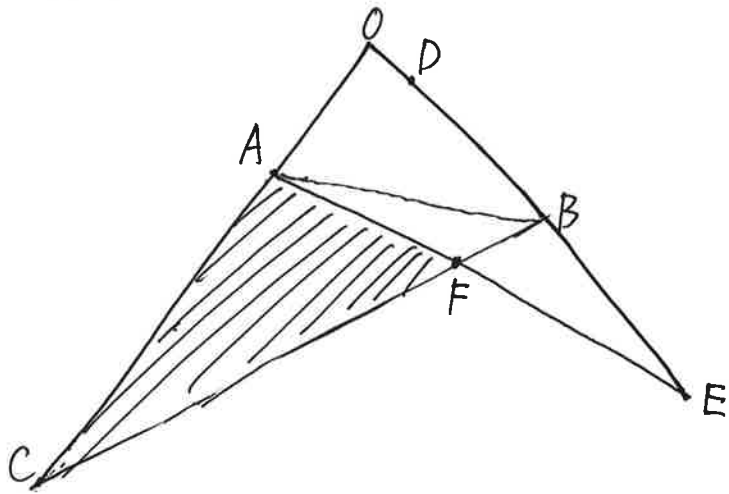
$$\frac{a}{2}|\vec{OA}|^2 - a\vec{OA} \cdot \vec{OB} - \frac{1}{2}\vec{OA} \cdot \vec{OB} + |\vec{OB}|^2 = 0$$

$$|\vec{OA}| = 4, |\vec{OB}| = 5, \vec{OA} \cdot \vec{OB} = 4 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 10 \text{ (} \angle = 60^\circ \text{)}$$

$$\frac{a}{2} \times 16 - a \times 10 - \frac{1}{2} \times 10 + 25 = 0$$

これを解いて $a = 10$ (これは $a > 1$ をみたす)

II (4) (1)



$a=4$ の時.

$$s+4t \leq 4, 2 \leq 2s+t, s \geq 0, t \geq 0$$

このときの点Pの存在範囲を図示すると.

左のようになる.

ただし, C, D, E. は,

$\vec{OC} = 4\vec{OA}, \vec{OD} = \frac{1}{4}\vec{OB}, \vec{OE} = 2\vec{OB}$ をみたす.
点である. FはAEとBCの交点であるとする.

FはAEとBCの交点であるため.

m, n を実数として.

$$CF:FB = m:1-m$$

$$AF:FE = n:1-n \text{ とする.}$$

$$\begin{aligned} \vec{OF} &= (1-m)\vec{OC} + m\vec{OB} \\ &= 4(1-m)\vec{OA} + m\vec{OB} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{OF} &= (1-n)\vec{OA} + n\vec{OE} \\ &= (1-n)\vec{OA} + 2n\vec{OB} \end{aligned}$$

$\vec{OA}$ と $\vec{OB}$ は1次独立なので.

$$\begin{cases} 4(1-m) = 1-n \\ m = 2n \end{cases}$$

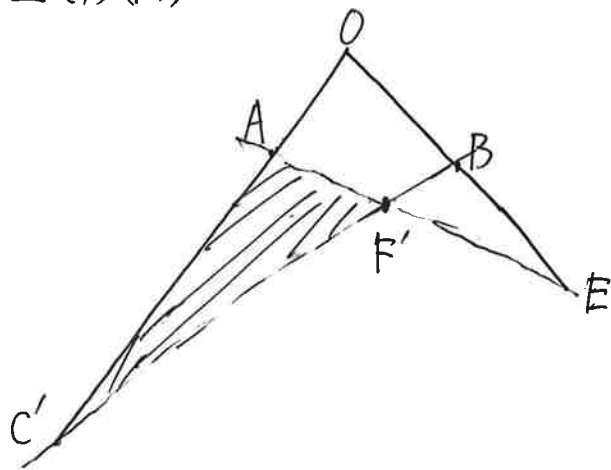
$$\text{これを解いて } m = \frac{6}{7}, n = \frac{3}{7}$$

よって求める面積は

$$\begin{aligned} \Delta ACF &= \Delta ACB \times \frac{6}{7} \\ &= 15\sqrt{3} \times \frac{6}{7} \\ &= \frac{90\sqrt{3}}{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta ACB &= \Delta OCB - \Delta OAB \\ &= \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 5 \cdot \sin 60^\circ - 5\sqrt{3} \\ &= 15\sqrt{3} \end{aligned}$$

II (4) (iii)



$$s+at \leq a, 2 \leq 2s+t, s \geq 0, t \geq 0$$

このときの点Pの存在範囲を図示すると.

左の斜線部のようになる.

ただし, C' は $\vec{OC'} = a\vec{OA}$ をみたす点とし.

F' は AE と BC' の交点とする.

F' は AE と BC' の交点であるため, x, y を実数として.

$$C'F' : F'B = x : 1-x$$

$$AF' : F'E = y : 1-y \text{ とする.}$$

(ii) と同様にして.

$$\vec{OF'} = a(1-x)\vec{OA} + x\vec{OB}$$

$$\vec{OF'} = (1-y)\vec{OA} + 2y\vec{OB}$$

$\vec{OA}$ と $\vec{OB}$ は 1 次独立なので.

$$\begin{cases} a(1-x) = 1-y \\ x = 2y \end{cases}$$

$$\text{これを解いて } x = \frac{2(a-1)}{2a-1}, y = \frac{a-1}{2a-1} \text{ (ただし, } a > 1 \text{ より } 2a-1 > 1 \text{ かつ } 2a-1 \neq 0)$$

$$\Delta AC'B = \Delta AC'B \times \frac{2(a-1)}{2a-1}$$

$$= 5\sqrt{3}(a-1) \times \frac{2(a-1)}{2a-1}$$

$$= \frac{10\sqrt{3}(a-1)^2}{2a-1}$$

これが $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ に等しいので.

$$\frac{10\sqrt{3}(a-1)^2}{2a-1} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$$4a^2 - 10a + 5 = 0$$

$$a = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{4} \quad a > 1 \text{ より } a = \frac{5 + \sqrt{5}}{4}$$

$$\left(\begin{aligned} \Delta AC'B &= \Delta OC'B - \Delta OAB \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4a \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 5\sqrt{3} \\ &= 5\sqrt{3}(a-1) \end{aligned} \right)$$